TUTORATO ANALISI I - 06/12/23

INTEGRAZIONE PER PARTI

UNA primitiva di f

RECAP

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = \underbrace{f(x)}\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

viene dalla formula $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

Esempi: 1)

$$\int \log(x)\,dx = \int \underbrace{1}_{f'}\cdot \underbrace{\log(x)}_{g}\,dx = \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{\log x}_{g} - \int \underbrace{\cancel{x}}_{f}\,\underbrace{\frac{1}{\cancel{x}}}_{g'}\,dx =$$

$$= x\log x - x + c$$

2)

$$\int \arctan(x)\,dx = \int 1\cdot \arctan(x)\,dx = x\arctan x - \int x\,\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2x}^{(1+x^2)'}}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

Esercizio 1: Calcolare $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$.

Soluzione

Sostituzione $t = \sqrt{x}$, $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2t}\,dx$

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_{1 = \sqrt{1}}^{2 = \sqrt{4}} \underbrace{e^t}_{f'}\,\underbrace{2t}_{g}\,dt = \underbrace{e^t}_{f}\,\underbrace{2t}_{g}\Big|_1^2 - \int_1^2 \underbrace{e^t}_{f}\,\underbrace{2}_{g'}\,dt =$$

$$= 4e^2 - 2e - 2\int_1^2 e^t\,dt =$$

$$= 4e^2 - 2e - 2\,e^t\Big|_1^2 =$$

$$= 4e^2 - 2e - 2(e^2 - e) = 2e^2$$

Esercizio 2 Calcolare $\int_0^{\pi} 3x\cos(x)\,dx$.

Soluzione

$$\int_0^{\pi} \underbrace{3x}_{g}\ \underbrace{\cos(x)}_{f'}\,dx = 3x\sin(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 3\sin(x)\,dx =$$

$$= 0 - 3\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx = -3\,(-\cos x)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -3\,\big(1-(-1)\big) = -6\,.$$

Esercizio 3

Determinare una primitiva della funzione $\log(x+\sqrt{1+x^2})$.

Soluzione

$$\int \log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{\log(x+\sqrt{1+x^2})}_{g}\,dx =$$

$$= x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\,\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$(x+\sqrt{1+x^2})' = 1 + (\sqrt{1+x^2})' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\,\frac{\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}}{\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int 2x\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int \underbrace{(1+x^2)'}_{a'(x)}\ \underbrace{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{[a(x)]^{-1/2}}\,dx =$$

$$= x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{(1+x^2)^{1/2}}{\cancel{1/2}} + \underbrace{c}_{}$$

$$= x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + \underbrace{c}_{}$$

non è richiesta dall'Esercizio (si può porre tranquillamente $c=0$)

Recap $(\alpha\neq -1)$

$$\int a'(x)\,[a(x)]^{\alpha}\,dx = \frac{[a(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Esercizio "per casa" : Calcolare $\int e^x \sin(x)\, dx$

[Hint : integrare per parti due volte]

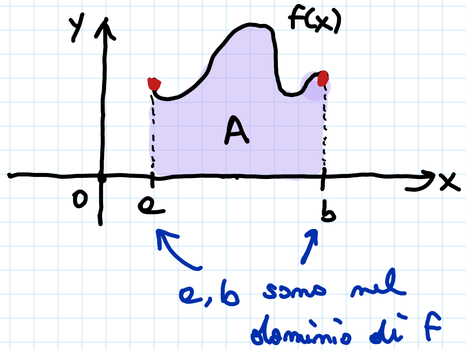
Esercizio Bonus   Calcolare $\int e^{\alpha x} \sin(\beta x)\, dx$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Sostanzialmente identico

INTEGRALI GENERALIZZATI (o IMPROPRI)

Breve Recap di Teoria

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile

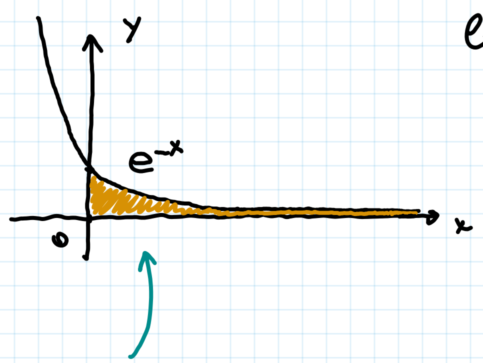


$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dove F è una primitiva di f

(Teo. Fondam. del calcolo integrale)

Vogliamo estendere il concetto di area ad esempio a regioni di piano illimitate.



Come? Ancora una volta tramite i limiti... ad esempio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Esempio: $y = e^{-x}$ Vogliamo calcolare l'area gialla dell'immagine

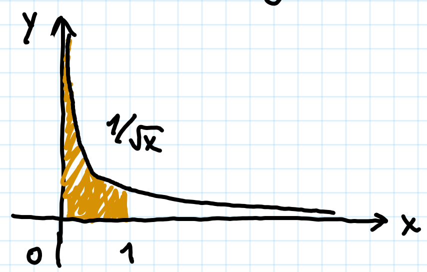
Sappiamo che $\int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^b = 1 - e^{-b}$ per ogni $b > 0$.

Quindi $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b \to +\infty} (1 - \underbrace{e^{-b}}_{\to 0}) = 1$.

La stessa cosa si può fare con $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ per definire $\int_a^b f(x)\,dx$.

Esempio $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ha dominio $(0,+\infty)$

Calcoliamo $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

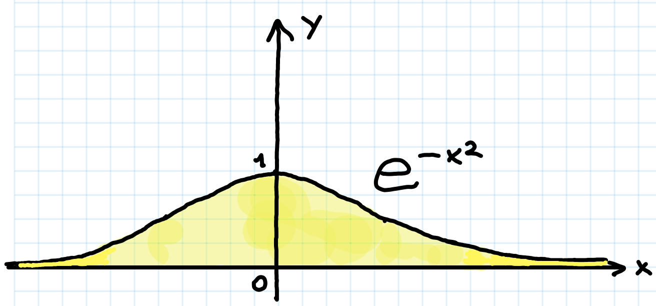


$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left.\frac{x^{1/2}}{1/2}\right|_0^1 = \frac{1}{1/2} - 0 = 2.$$

si intende $\lim_{x\to 0^+}$

Solitamente è richiesto di discutere la CONVERGENZA degli integrali generalizz., cioè se l'integ. generalizz. esiste finito (non richiedendo di trovare il valore finito).

Esempio $\quad f(x)=e^{-x^2}$ una "campana di Gauss" (quasi... a meno di una costante)



Possiamo facilmente dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < +\infty$$

simbologia usata per dire che l'integrale generalizzato converge

$$\left[\text{Infatti: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \overset{e^{-x^2}\text{ PARI}}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\underbrace{\int_0^1 \underbrace{e^{-x^2}}_{\le 1}dx}_{\le 1} + 2\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx \overset{\text{se } x\ge 1 \text{, allora } e^{-x^2}\le e^{-x}}{\le} 2 + 2\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = 2+\frac{2}{e}.\right]$$

È molto più difficile calcolare il valore di $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

Il valore è $\sqrt{\pi}$, vedere ANALISI II

(ad esempio le note del TUTORATO ANALISI II – 17/05/23)

Come solitamente si risolvono questi esercizi? STIME ASINTOTICHE
CONFRONTO

Fatti importanti da ricordare: $r > 0$ arbitrario

1) $\int_0^r \frac{1}{x^\alpha}\,dx \underbrace{< +\infty}_{\text{converge}}$ se e solo se $\alpha < 1$

$$\int_0^r x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_0^r & \alpha \neq 1 \\ \left.\log|x|\right|_0^r & \alpha = 1 \end{cases}$$

Adesso per $x \to 0^+$ abbiamo $\log x \to -\infty \Rightarrow \left.\log x\right|_0^r = +\infty$

$= \log r - \lim_{x \to 0^+} \log x$

$$x^{-\alpha+1} \to \begin{cases} 0, & -\alpha+1 > 0 \\ +\infty, & -\alpha+1 < 0 \end{cases}$$

è l'unico caso "buono"

2) $\int_r^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx < +\infty$ se e solo se $\alpha > 1$

Analogo a quello precedente.

Combinando 1) e 2) con le stime asintotiche si risolve una gran parte di esercizi di questo genere.

Esercizio 1 Discutere la convergenza di : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$

Soluzione

[La funzione $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$ è definita (e continua) su $(0, +\infty)$,

quindi sicuramente è integrabile in ogni intervallo $[a, b]$ con $0 < a < b$.

I "PROBLEMI" sono agli estremi 0 e $+\infty$]

In 0 : $f(x)$ in un intorno di 0 si comporta come: $\dfrac{1}{x^2}$

$$\cos x \sim 1 \qquad x \to 0$$

$$\int_0^{\varepsilon} f(x)\,dx \sim \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{che diverge.} \qquad \alpha = 2 > 1$$

non abbiamo neanche bisogno di guardare il problema a $+\infty$...

... Lo vediamo lo stesso

A $+\infty$:
$$\left| \int_r^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \right| \leq \int_r^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \underset{|\cos x| \leq 1}{\leq} \int_r^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \underset{\alpha = 2 > 1}{<} +\infty$$

Esercizio 2 Discutere la convergenza di : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^{\frac{5}{4}}}\,dx$

Soluzione

Come prima, guardiamo come si comporta $\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{x^{5/4}}$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$

Per $x \to 0$: $\sin\sqrt{x} \sim \sqrt{x} = x^{1/2}$

$$\int_0^r \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^{5/4}}\,dx \sim \int_0^r \frac{x^{1/2}}{x^{5/4}}\,dx = \int_0^r \frac{1}{x^{5/4-1/2}}\,dx =$$

$$= \int_0^r \frac{1}{x^{3/4}}\,dx < +\infty$$

Per $x \to +\infty$: $\sin\sqrt{x}$ è limitato

$$\int_r^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x^{5/4}} \leq \int_r^{+\infty} \frac{1}{x^{5/4}}\,dx < +\infty$$

In conclusione, l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x^{5/4}}\,dx$ converge

Esercizio 3 Discutere la convergenza di : $\displaystyle\int_0^{1} \underbrace{\frac{(\sin\sqrt[3]{x})^4}{e^{2x}(1-\cos x)}}_{f(x)}\,dx$

Solutione

Considerando il dominio di $f(x)$, l'unico problema ($x \in (0,1)$) è in 0.

- $(\sin(\sqrt[3]{x}))^4 \sim (\sqrt[3]{x})^4 = x^{4/3}$
- $e^{2x} \sim 1$
- $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

$$\int_0^r f(x)\,dx \sim \int_0^r \frac{x^{4/3}}{\frac{1}{2}x^2} \sim 2\int_0^r \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$$

$< +\infty$ perché $\frac{2}{3} < 1$

Esercizio 4 Discutere la convergenza di : $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\log x + 1 - x}\, dx.$$

Soluzione

Per capire dove potrebbero esserci problemi con l'integrale, determiniamo il dominio di $\frac{1}{\log x + 1 - x}$. Per quali $x \in \mathbb{R}^+$ si ha $\log x + 1 - x \neq 0$?

A noi interessa solo il caso $x \geq 1$. $\left(\int_1^{+\infty} \right)$

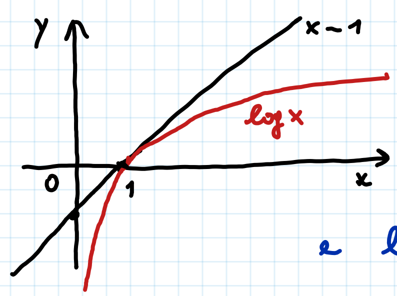
$\log x + 1 - x = 0$

$x = 1 \Rightarrow \log 1 + 1 - 1 = 0$ quindi 1 NON è nel dominio

$x > 1 \Rightarrow \log x < x - 1$

Viene da Taylor in $x_0 = 1$: Teorema di Lagrange su $[1, x]$.

Graficamente



$y = x - 1$ è la tangente al grafico di $y = \log x$ in $x_0 = 1$

e $\log x$ è una funzione concava

In particolare se $x > 1$, allora $\log x + 1 - x \neq 0$

Quindi gli unici problemi di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\log x + 1 - x}\, dx$ sono agli estremi.

In 1) Come si comporta $\log x + 1 - x$ per $x \to 1^+$?

Più semplicemente, cambio di variabile $t = x - 1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\log(t+1) - t}\, dt$$

$$\log(t+1) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow \log(t+1) - t \sim -\frac{t^2}{2}$$

Quindi $\displaystyle\int_0^r \frac{1}{\log(t+1)-t}\,dt \sim -2\int_0^r \frac{1}{t^2}\,dt$ diverge $\rightsquigarrow$ l'integrale diverge

Non necessario

Vediamo comunque cosa succede a $+\infty$:

$$\log x - x + 1 = -x\Big(\overbrace{\underbrace{-\frac{\log x}{x}}_{\to 0}}^{o(1)} + 1 - \overbrace{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}^{o(1)}\Big) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$$

Il Termine "dominante" per $x\to+\infty$ è $-x$

$$\int_r^{+\infty}\frac{1}{\log x - x+1}\,dx \sim \int_r^{+\infty} -\frac{1}{x}\,dx = -\infty$$

Oppure: per $x>1$ si ha $\frac{\log x}{x}>0$, quindi $1-\underbrace{\frac{\log x}{x}}_{<0} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{<0} < 1$

$$\log x - x + 1 = -x\left(1-\frac{\log x}{x}-\frac{1}{x}\right) > -x$$

$$\frac{1}{\log x - x + 1} < -\frac{1}{x} \implies \int_r^{+\infty}\frac{1}{\log x - x+1}\,dx < -\int_r^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = -\infty$$

Esercizio 5 Discutere la convergenza di: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}\,dx$

Soluzione

In 0: $\sqrt{1+x^2}-x \sim 1$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$

$$\int_0^r \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}\,dx \sim \int_0^r \frac{1}{x^{1/2}}\,dx < +\infty$$

converge

A $+\infty$: $\sqrt{1+x^2}-x = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x = x\left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}-1\right)$

$t = \frac{1}{x}$, $t\to 0$ se $x\to+\infty$

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1+t^2}-1 = (1+t^2)^{1/2}-1 \sim \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2x^2}$$

$$\sqrt{1+x^2}-x \sim x\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \frac{1}{2x}$$

Quindi $\displaystyle\int_r^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}\,dx \sim \int_r^{+\infty} \frac{1}{2x\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_r^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx < +\infty$

converge

In conclusione $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.